Transitorios RLC en corriente continua

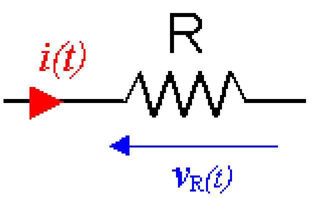
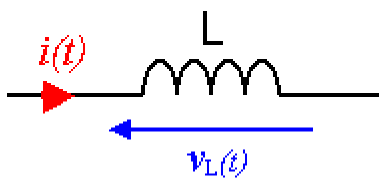
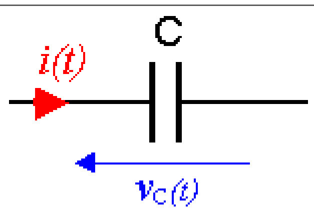
Cuando en un circuito producimos un cambio de las condiciones de trabajo, generalmente por variación de la tensión aplicada, se produce un periodo de transición hasta que el circuito queda en un régimen permanente estable.

El motivo del régimen transitorio está en la "*inercia eléctrica*" que poseen las bobinas y los condensadores, que impiden las variaciones instantáneas de tensión y de corriente.

El estudio del régimen transitorio utiliza un complejo y laborioso aparato matemático, con empleo del cálculo diferencial e integral, que aquí obviaremos en la medida de lo posible para resaltar las conclusiones y consecuencias prácticas de estos regímenes.

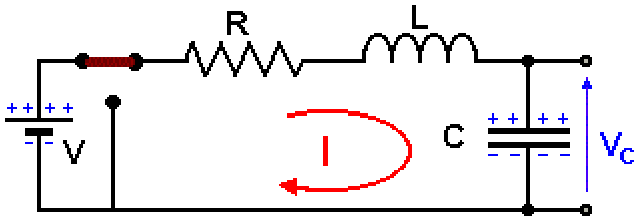
Respuesta en el tiempo de los distintos elementos

La variación de la tensión en extremos de un elemento a lo largo del tiempo en función de la intensidad que lo recorre responde a las siguientes leyes:

RESISTENCIA	**BOBINA**	**CONDENSADOR**
		
$v_R(t) = R \cdot i(t)$	$v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$v_C(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)\,dt$

La variación de tensión en la resistencia es proporcional a la intensidad, mientras que en la bobina y en el condensador lo es a su derivada y a su integral respectivamente.

Conexión de un circuito RLC



Aplicando Kirchhoff y derivando toda la ecuación para eliminar el término integral:

$$V_L + V_R + V_C = V \quad \rightarrow \quad L\cdot\frac{di}{dt} + R\cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \quad \rightarrow \quad L\cdot\frac{d^2 i}{dt^2} + R\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\cdot i = 0$$

$$L\cdot s^2 + R\cdot s + \frac{1}{C}\cdot s = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2\cdot L} \pm \frac{1}{2\cdot L}\sqrt{R^2 - \frac{4\cdot L}{C}} = -\frac{R}{2\cdot L} \pm \frac{R}{2\cdot L}\sqrt{1 - \frac{4\cdot L}{C\cdot R^2}} = -\frac{R}{2\cdot L} \pm \frac{R}{2\cdot L}\sqrt{1 - \frac{1}{\dfrac{C\cdot R^2}{4\cdot L}}}$$

$$\xi = \frac{C\cdot R^2}{4\cdot L}$$

La solución de la ecuación diferencial homogenea de segundo grado resultante depende de las raices del polinomio formado por sus coeficientes constantes.

Tal como se ha desarrollado, las raices de la ecuación pueden expresarse en función de una constante denominada **coeficiente de amortigüamiento**.

Según el valor que tome el coeficiente de amortigüamiento tendremos la raiz de un número positivo, resultando raices reales, o la raiz de un número negativo que da lugar a números complejos:

Coeficiente de amortigüamiento	Raices	Tipo de sistema
> 1	Reales distintas	Sobreamortigüado
= 1	Reales iguales	Críticamente amortigüado
< 1	Complejas conjugadas	Subamortigüado
= 0	Imaginarias puras conjugadas	No amortigüado (oscilante)

Sistema sobreamortigüado

$$\xi > 1$$

$$s_1 \neq s_2$$

$$i = A_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

$$i_0 = A_1 + A_2 = 0$$

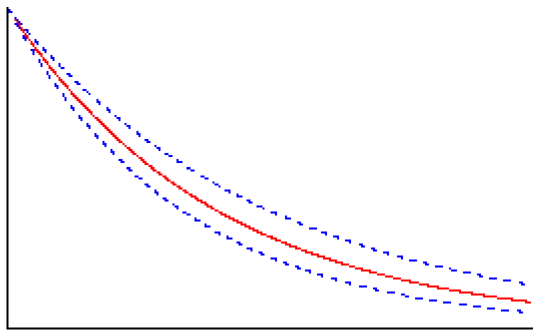
$$\frac{di}{dt} = s_1 \cdot A_1 + s_2 \cdot A_2 = \frac{1}{L}(V - V_{C0} - R \cdot i_0)$$

$$A_1 = -A_2 = \frac{V - V_{C0}}{L \cdot (s_1 - s_2)} = \frac{V - V_0}{\sqrt{R^2 - \frac{4 \cdot L}{C}}}$$

$$i = \frac{V - V_0}{\sqrt{R^2 - \frac{4 \cdot L}{C}}} \cdot e^{-s_1} - \frac{V - V_0}{\sqrt{R^2 - \frac{4 \cdot L}{C}}} \cdot e^{-s_2}$$

La ecuación corresponde a una intensidad que decrece exponencialmente hasta anularse.

Cuanto menor es el coeficiente de amortigüamiento más rápidamente disminuye la intensidad.

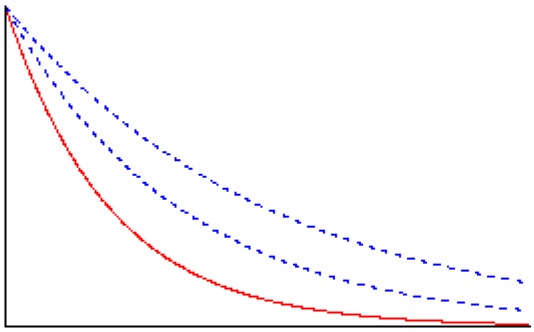


Sistema críticamente amortigüado

$$\xi = 1$$
$$s_1 = s_2 = s$$
$$i = A_1 \cdot t \cdot e^{s \cdot t} + A_2 \cdot e^{s \cdot t}$$
$$i_0 = A_2 = 0$$
$$\frac{di}{dt} = A_1 + s \cdot A_2 = \frac{1}{L}(V - V_{C0} - R \cdot i_0)$$
$$A_1 = \frac{V - V_{C0}}{L} =$$
$$i = \frac{V - V_0}{L} \cdot e^{-s \cdot t}$$

La ecuación corresponde a una intensidad que decrece exponencialmente.

Para este valor del coeficiente de amortigüamiento es para el que más rápidamente disminuye la intensidad sin llegar a oscilar cambiando de sentido.

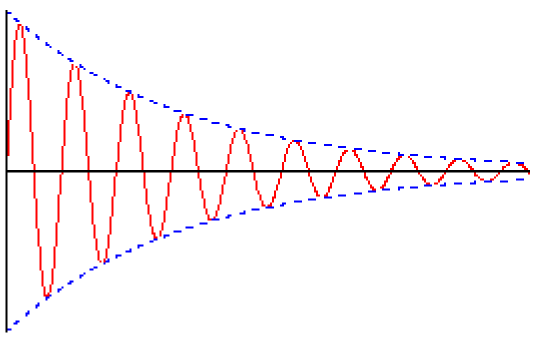


Sistema subamortigüado

$$1 > \xi > 0$$
$$s_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \omega_n$$
$$i = A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \text{sen}\ \omega_n \cdot t + A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos \omega_n \cdot t$$
$$i_0 = A_2 = 0$$
$$\frac{di}{dt} = \omega_n \cdot A_1 - \alpha \cdot A_2 = \frac{1}{L}(V - V_{C0} - R \cdot i_0)$$
$$A_1 = \frac{V - V_{C0}}{\omega_n \cdot L}$$
$$i = \frac{V - V_{C0}}{\omega_n \cdot L} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \text{sen}\ \omega_n \cdot t \quad + \quad \frac{V - V_{C0}}{\omega_n \cdot L} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos\ \omega_n \cdot t$$

Esta ecuación corresponde a una intensidad senoidal de pulsación w_n cuya amplitud desciende exponencialmente.

La intensidad es pues alterna, aunque su amplitud decrece exponencialmente hasta anularse.



A la pulsación w_n se la conoce como pulsación natural o amortigüada.

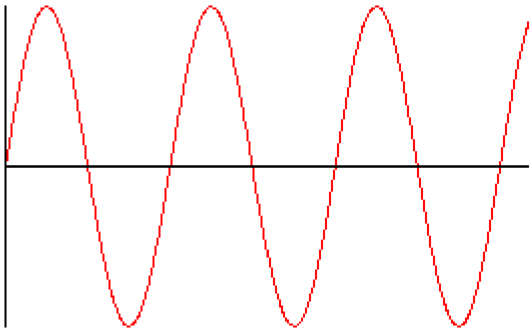
Sistema no amortigüado (oscilante)

$$\xi = 0$$
$$s_{1,2} = \pm j \cdot \omega_0$$
$$i = A_1 \cdot \operatorname{sen} \omega_0 \cdot t + A_2 \cdot \cos \omega_0 \cdot t$$
$$i_0 = A_2 = 0$$
$$\frac{di}{dt} = \omega_0 \cdot A_1 = \frac{1}{L}(V - V_{C0} - R \cdot i_0)$$
$$A_1 = \frac{V - V_{C0}}{\omega_0 \cdot L}$$
$$i = \frac{V - V_{C0}}{\omega_0 \cdot L} \cdot \operatorname{sen} \omega_0 \cdot t$$

Esta ecuación corresponde a una intensidad senoidal de pulsación W_0.

Para que se anule el coeficiente de amortigüamiento el valor de la resistencia ha de ser nulo.

La energía se transfiere entonces alternativamente de la bobina al condensador y viceversa sin pérdida alguna.



A la pulsación W_0 se le llama frecuencia de resonancia.

En electrónica, ante la imposibilidad práctica de eliminar totalmente la resistencia, se utilizan circuitos electrónicos amplificadores que restituyen la amplitud perdida en dicha resistencia. El conjunto recibe el nombre de circuito oscilador senoidal, del que existen varios modelos como lo son los osciladores Hartley, Colpits, etc.