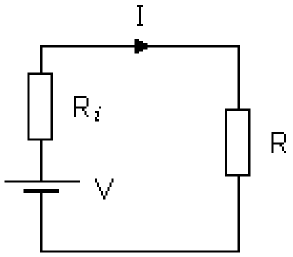
Transferencia de máxima potencia

Un ejemplo

Si tenemos un generador de tensión V con resistencia interna R_i alimentando una resistencia de carga R se produce una intensidad I que genera en R una potencia útil $R \cdot I^2$, pero también se pierde una potencia $R_i \cdot I^2$.



Si podemos escoger la resistencia de carga, para distintos valores de R circula una intensidad diferente que produce distintas potencias útil y perdida.

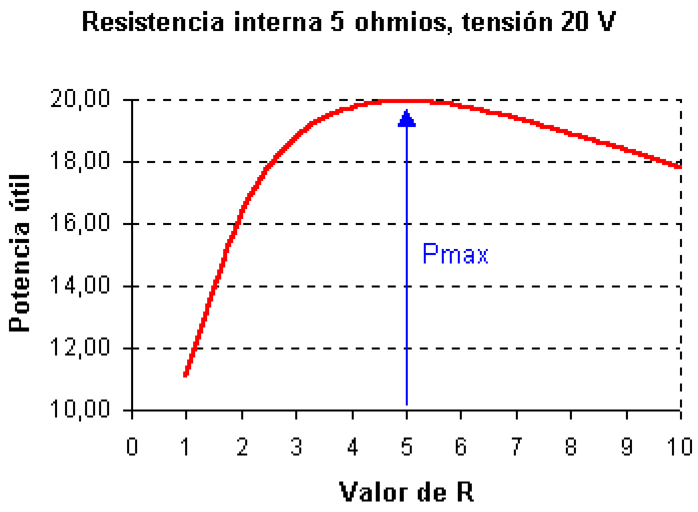
Veamos un ejemplo:

- $V = 20$
- $R_i = 5$
- $R = ?$ (variable de 0 a 10)

Calculando los distintos parámetros del circuito para cada valor de R:

R de carga	Intensidad	Potencia útil	Potencia perdida	Rendimiento
R	$I = V/R_i+R)$	$R \cdot I^2$	$R_i \cdot I^2$	$100 \cdot P_u/(P_u+P_p)$
1	3,33	11,11	55,56	17 %
2	2,86	16,33	40,82	29 %
3	2,50	18,75	31,25	38 %
4	2,22	19,75	24,69	44 %
5	2,00	20,00	20,00	50 %
6	1,82	19,83	16,53	55 %
7	1,67	19,44	13,89	58 %
8	1,54	18,93	11,83	62 %
9	1,43	18,37	10,20	64 %
10	1,33	17,78	8,89	67 %

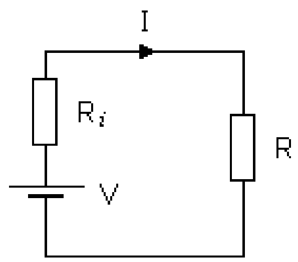
Representando gráficamente la variación de potencia útil:



La potencia útil va creciendo hasta hacerse máxima cuando: $R = R_i$. Después decrece de nuevo.

Cuando $R = R_i$ la potencia es máxima en la carga, momento en el cual el rendimiento es del 50%.

Caso sencillo de un generador de corriente continua con resistencia interna que alimenta una resistencia de carga



Si tenemos un generador de corriente continua alimentando una resistencia de carga R, la potencia activa disipada en dicha resistencia de carga será el producto de la resistencia por el cuadrado de la intensidad que circula por ella:

$$P = R \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad P = R \cdot \frac{V^2}{(R + R_i)^2} \quad \Rightarrow \quad P = V^2 \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2}$$

Como puede observarse la potencia disipada es función de R.

La condición para que la potencia sea máxima es que la derivada primera de esta función sea igual a cero. Derivando con respecto a R e igualando a cero:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad V^2 \cdot \frac{1 \cdot (R + R_i)^2 - 2 \cdot (R + R_i) \cdot 1 \cdot R}{((R + R_i)^2)^2} = 0$$

$$(R + R_i)^2 - 2 \cdot R \cdot (R + R_i) = 0$$

$$R^2 + R_i^2 + 2 \cdot R \cdot R_i - 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R \cdot R_i = 0$$

$$R_i^2 - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R = R_i$$

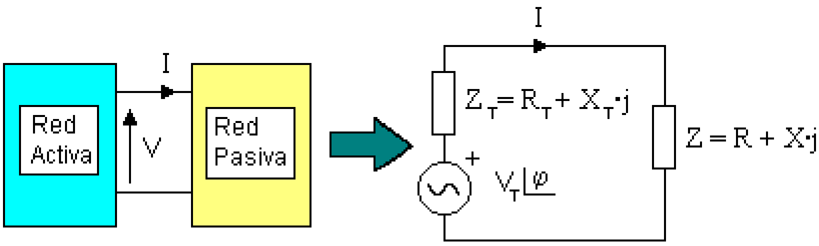
Es decir, que para un generador determinado con una resistencia interna dada, la máxima transferencia de potencia a la carga se consigue conectando una resistencia de igual valor a la resistencia interna del generador.

Si incluimos la resistencia de la línea la resistencia de carga deberá ser la suma de las resistencias de la línea y la interna del generador (podrían haberse asociado en serie previamente).

$$P = V^2 \cdot \frac{R}{R + R_i + R_L} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial R} = 0 \Rightarrow R = R_i + R_L$$

Podrían haberse asociado en serie previamente o aplicarse el teorema de Thevenin como se mostrará a continuación para un caso más general.

Caso general de una red activa que alimenta una red pasiva (generador de Thevenin alimentando una impedancia)



Si tenemos una red pasiva alimentada por una red activa, podemos sustituir la primera por una impedancia equivalente y la segunda por su circuito equivalente de Thévenin. La potencia activa disipada en la red pasiva será el producto de la resistencia por el cuadrado de la intensidad que circula por ella:

$$P = R \cdot I^2 \Rightarrow P = R \cdot \frac{V_T^2}{\left(\sqrt{(R + R_T)^2 + (X + X_T)^2}\right)^2}$$

$$P = V_T^2 \cdot \frac{R}{(R + R_T)^2 + (X + X_T)^2}$$

Como puede observarse la potencia disipada es función de R y de X.

Al tratarse de una función de dos variables, la condición para que la potencia sea máxima es doble:

- Que la derivada parcial respecto a X sea igual a cero (se toma R como una constante).

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0 \Rightarrow V_T^2 \cdot \frac{-2 \cdot (X + X_T) \cdot 1 \cdot R}{((R + R_T)^2 + (X + X_T)^2)^2} = 0$$

$$-2 \cdot (X + X_T) \cdot R = 0 \Rightarrow X + X_T = 0 \Rightarrow X = -X_T$$

- Que la derivada parcial respecto a R sea igual a cero (se toma X como una constante).

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_T^2 \cdot \frac{1 \cdot ((R + R_T)^2 + (X + X_T)^2) - 2 \cdot (R + R_T) \cdot 1 \cdot R}{((R + R_T)^2 + (X + X_T)^2)^2} = 0$$

$$(R + R_T)^2 + (X + X_T)^2 - 2 \cdot (R + R_T) \cdot R = 0$$

$$R^2 + R_T^2 + 2RR_T + (X + X_T)^2 - 2R^2 - 2RR_T = 0$$

$$R^2 = R_T^2 + (X + X_T)^2$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación anterior:

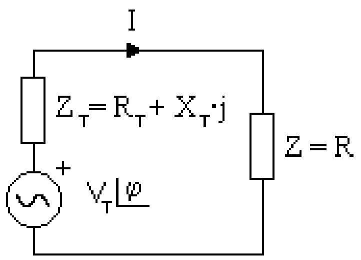
$$X = -X_T \quad \Rightarrow \quad R^2 = R_T^2 + (X + X_T)^2 = R_T^2 + (-X_T + X_T)^2 = R_T^2$$

$$\begin{array}{llll} \textit{Luego:} & R = R_T & y & X = -X_T \\ \textit{Es decir:} & Z = Z_T^* & (\textit{conjugada}) & \end{array}$$

La impedancia de carga con la que se consigue la máxima transferencia de potencia a la carga tiene un valor igual a la conjugada de la impedancia de Thevenin.

(mismo valor real y valor imaginario de signo contrario).

Caso particular de una red activa que alimenta una resistencia pura (generador de Thevenin alimentando una resistencia pura)



Si tenemos un circuito equivalente de Thévenin alimentando una resistencia pura (parte imaginaria de la carga nula). La potencia activa disipada en la red pasiva será el producto de la resistencia por el cuadrado de la intensidad que circula por ella:

$$P = R \cdot I^2 \quad \Rightarrow \quad P = R \cdot \frac{V_T^2}{(\sqrt{(R + R_T)^2 + X_T^2})^2}$$

$$P = V_T^2 \cdot \frac{R}{(R + R_T)^2 + X_T^2}$$

Como puede observarse la potencia disipada es función únicamente de R.

La condición para que la potencia sea máxima será que la derivada primera respecto a R sea igual a cero.

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_T^2 \cdot \frac{1 \cdot ((R + R_T)^2 + X_T^2) - 2 \cdot (R + R_T) \cdot 1 \cdot R}{((R + R_T)^2 + X_T^2)^2} = 0$$

$$(R + R_T)^2 + X_T^2 - 2 \cdot (R + R_T) \cdot R = 0$$

$$R^2 + R_T^2 + 2RR_T + X_T^2 - 2R^2 - 2RR_T = 0$$

$$R^2 = R_T^2 + X_T^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = |Z_T|$$

Es decir, la resistencia de carga (óhmica pura) con la que se consigue la máxima transferencia de potencia a la carga tiene un valor igual al módulo de la impedancia de Thevenin.